

Thèse

PRESENTEE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE SPECIALITE (3^e CYCLE)

PHYSIQUE (PHYSIQUE THEORIQUE)

PAR

Daniel ALLOUCHE

LICENCIE ES-SCIENCES

S_4 comme une possibilité de groupe d'invariance forte des quatre quarks fondamentaux

SOUTENUE LE 2 JUILLET 1965 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. J. BRACONNIER

Président

M. FLATO

J.P. VIGIER

} *Examineurs*



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553428_0009

Thèse

PRESENTÉE

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LYON

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE SPECIALITE (3^e CYCLE)

PHYSIQUE (PHYSIQUE THEORIQUE)

PAR

Daniel ALLOUCHE

LICENCIE ES-SCIENCES

S_4 comme une possibilité de groupe d'invariance forte des quatre quarks fondamentaux

SOUTENUE LE 2 JUILLET 1965 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM. J. BRACONNIER

M. FLATO

J.P. VIGIER

Président

Examineurs



FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE LYON

Doyens honoraires

LONGCHAMBON

MOUSSA

GAUTHIER Henri

Professeurs honoraires

LOCQUIN
de LARAMBERGUE
SOLLAUD

MENTZER
MOUSSA
JAFFARD

EYRAUD Henri
DEJARDIN
VIRET

Doyen :

J. BRACONNIER

Assesseurs :

MESNARD - BOIDIN

Professeurs

LONGCHAMBON
PRETTRE
COURTY
KUHNER
MALECOT
PARIS
AUMERAS
COLONGE
JANIN
FLANDRIN
BERNARD
DUFAY Jean
NIGON
GAUTHIER Henri
WAUTIER
CHOPIN
CUEILLERON
BRACONNIER
EYRAUD Charles
SARAZIN

Minéralogie
Chimie industrielle
Chimie-Physique
Botanique
Mécanique rationnelle et appliquée
Chimie minérale
Chimie générale II
Chimie organique
Physique générale
Géologie appliquée
Physique industrielle
Astronomie
Zoologie expérimentale
Géologie générale
Zoologie
Chimie biologique
Chimie
Calcul différentiel et intégral
Chimie-physique appliquée
Physique nucléaire

BOIDIN
PERES
MESNARD
GRANDMONTAGNE
BOUTILLIER
LAFOUCHIERE
DREUX
TEICHNER
PAVANS DE CECCATTY
MERLIN
DUFAY Maurice
PHILBERT
COHEN-ADAD
DAVID Louis
CHANEL
MAURY
DEPRAZ
GAUTHIER Jean
GAUME

Microbiologie et Mycologie
Physiologie
Electronique
Physique
Minéralogie
Physique nucléaire théorique
Chimie organique
Chimie industrielle
Zoologie
Chimie analytique
Physique de l'Atmosphère
Physique nucléaire
Chimie
Géologie générale
Psychophysiologie
Méthodes Mathématiques de la
Physique
Physique nucléaire
Chimie
Physique expérimentale

Professeurs sans chaire

FERON
LAFORGUE
LEGAY
UZAN
CHENEVOY
GINET
ASCH
MICHEL Pierre
DUCET
Mme ERICSON
ERBEIA

Mathématiques
Physique
Zoologie expérimentale S.P.C.N.
Physique S.P.C.N.
Géologie appliquée
Zoologie
Physique
Minéralogie
Biologie végétale
Physique générale
Physique

Mlle MAITROT
GEVIN
PONASSE
d'INCAN
LEFEBVRE
PERNET
CHERY
BERGEON
Mlle GAUTHERON
DESCOTES
LEMOIGNE

Physique
Géologie générale
Mathématiques
Physique
Mathématiques
Mathématiques
Physique
Physique C.S.U.
Chimie biologique
Chimie organique
Botanique

Maitres de conférences

MARTEL
MATHIEU
PICARD Philippe
DEMARCO
MICHEL Georges
LEBRETON
Mlle THOMAS
DAVID Jean
TOUSSET

Mécanique
Mécanique des fluides
Mathématiques
Géologie générale
Biochimie
Biologie végétale
Chimie minérale
Biologie animale
Chimie propédeutique

FEUVRAS
PICARD Claude
SCHMITT
LAURENT
ROT
BETHOUX
Mlle CALAIS
GUSAKOW

Physique Electricité
Mathématiques
Physique M.P.C.
Chimie organique
Mathématiques
Mathématiques T.M.P.
Mathématiques C.S.U.
Physique

Maitre de conférences adjoint : M. PIERRON Chimie

Conseiller administratif : M. BURNET

Secrétaire principal honoraire : M. ROUX

Que Monsieur le Doyen J. Braconnier trouve ici l'expression de ma vive gratitude pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury.

J'ai eu la chance de travailler sous la direction de Monsieur M. Flato, je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie Monsieur J.P. Vigier qui a bien voulu honorer mon jury de sa présence.

J'associe à ces remerciements tous mes collègues de laboratoire pour les indications qu'ils m'ont données sur leurs travaux.

Cette thèse est dédiée à mes parents et à ma femme Yvonne, qui a également participé à la réalisation du texte.

SOMMAIRE

	Pages
I. INTRODUCTION	1
II. ETUDE DU GROUPE S_4	3
1. Théorie de Young	5
2. Les représentations irréductibles de S_4	16
3. Orthonormalisation des représentations données par les tableaux de Young	33
4. Self-représentation S de S_4	36
5. Réduction de la self-représentation S en $D_1 + D_3 = S'$	37
6. Etude et réduction de $\bar{D}_3 \times D_3$	40
7. Etude et réduction de $\bar{S}' \times S'$	56
III. QUADRO-INVARIANCE. PROPRIETES PHYSIQUES DU MODELE	61
1. Le modèle de Sakata et la trio-invariance	67
2. Quadro-invariance	73
3. Hamiltonien mésonique quadro-invariant	75
4. Echange $v \leftrightarrow n$ dans la forme réduite. Classification des mésons	77
IV. APPENDICE - RECHERCHE DES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES DE S_3	81
REFERENCES	87

I. INTRODUCTION.

Le grand nombre des particules connues aujourd'hui rend difficile l'élaboration d'une théorie des interactions fortes. La première idée fut de supposer que seules quelques-unes sont élémentaires et que les autres peuvent être envisagées comme étant des systèmes composés : on considéra les hyperons comme des états liés ($N + \pi$) du nucléon et du pion; une difficulté résidait en ce que la durée de vie des hyperons était trop grande (10^{-10} sec. au lieu de 10^{-21} sec.) et de plus Λ et Σ ont des isospins entiers et non demi-entiers comme la combinaison des isospins du nucléon et du pion l'impose.

Le problème fut résolu de la façon suivante : nous n'avons pas de pion dans l'hyperon mais une autre particule d'isospin demi-entier, le méson K ; ainsi est née la théorie de Goldhaber et Györghi (1956-1957) qui introduit la conservation de l'étrangeté dans les interactions fortes (réf. 1) ; l'hyperon est alors considéré comme un état lié de N et de $\bar{K}$ l'étrangeté de K et $\bar{K}$ étant respectivement $+1$ et -1 .

D'autres modèles ont été proposés : Sakata suppose que N et Λ sont "élémentaires" (n et p apportent l'isospin et Λ apporte l'étrangeté) ; Ξ et Σ sont des états liés de deux baryons et d'un antibaryon choisis parmi p , n , Λ , $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$; ce formalisme peut être étendu aux bosons qui peuvent être considérés comme des états liés "baryon-antibaryon".

L'existence de trois attributs (nombre baryonique, étrangeté, charge) conduit Y. Yamaguchi à concevoir l'existence de trois "objets" primitifs : les champs de chaos x , y , z qui ne doivent pas admettre a priori de distinction entre eux, d'où une théorie invariante sous les permutations du groupe S_3 (trio-invariance).

Y. Hara suppose l'existence de quatre champs fondamentaux avec une invariance par rapport au groupe continu ; ce schéma est en accord

avec le fait que l'on ne connaît que quatre leptons et que l'on sait qu'il existe une symétrie (phénoménologique) entre ces 4 leptons et 4 baryons "de base" (symétrie du genre "interaction courant-courant" dans l'hamiltonien):

$$(*) \quad \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} p \\ n \\ \Lambda \\ v \end{array} & \begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \\ \mu^- \\ \nu_\mu \end{array} \end{array}$$

C'est ainsi que nous avons été amenés à prévoir une extension possible de la trio-invariance dans le cas de quatre quarks baryoniques, S_4 étant considéré comme le groupe de symétrie interne des interactions fortes.

(*) la lettre v sera utilisée à la place de V pour des raisons de commodité typographique.

II. ETUDE DU GROUPE S_4

1. Théorie de Young.
2. Les représentations irréductibles de S_4
3. Orthonormalisation des représentations données par les tableaux de Young.
4. Self-représentation S de S_4 .
5. Réduction de la self-représentation S en $D_1 + D_3 = S'$.
6. Etude et réduction de $\overline{D}_3 \times D_3$.
7. Etude et réduction de $\overline{S}' \times S'$.

1. Théorie de Young.

Pour trouver les représentations irréductibles de S_4 nous utiliserons la technique des tableaux de Young ; les éléments du calcul sont les suivants (réf. 2, 3) :

Algèbre $\mathcal{S}_n$ des combinaisons linéaires d'éléments de S_n :

On peut induire du groupe S_n une structure d'algèbre d'opérateurs (notée $\mathcal{S}_n$) ; les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont des combinaisons linéaires des $n!$ éléments du groupe.

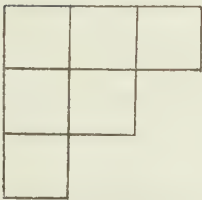
Soit $f(x_1 \dots x_n)$ une fonction de n variables, on considère S_n comme un ensemble d'opérateurs $M, N \dots$ qui changent l'ordre des variables :

$$Nf(x_1 \dots x_n) = f(x_{I_1} \dots x_{I_n}).$$

Le produit MN est défini par :

$$(MN)f(x_1 \dots x_n) = M(Nf(x_1 \dots x_n)) = Mf(x_{I_1} \dots x_{I_n}) = f(x_{k_1} \dots x_{k_n})$$

On définit l'addition par $(M + N)f = Mf + Nf$ et la multiplication par un scalaire par $(\alpha P)f = P(\alpha f)$.



Schéma, remplissage, définition des opérateurs P et N :

On appelle schéma α un tableau de n cellules; il y a α_1 cellules sur la 1ère ligne, α_2 cellules sur la 2ème ligne etc.. mais avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$. On a $\sum_1 \alpha_i = n$.

On appelle remplissage r une disposition des n nombres $1, 2 \dots n$ dans les cellules du schéma.

On définit:— $P_r^\alpha = \sum \pi_r^\alpha$ somme de toutes les permutations opérant seulement sur les lignes du schéma α muni du remplissage r

— $N_r^\alpha = \sum (-1)^v v_r^\alpha$ somme de toutes les permutations affectées du signe de la signature opérant sur les colonnes.

On montre que pour α et r fixés :

$$P_r^\alpha N_r^\alpha \neq 0$$

$$N_r^\alpha P_r^\alpha \neq 0$$

Pour un même schéma et deux remplissages r et s la condition nécessaire et suffisante pour que $P_r^\alpha N_s^\alpha \neq 0$ est qu'il n'existe pas un même couple d'éléments figurant dans une ligne de S_r^α et une colonne de S_s^α (la lettre S signifie schéma)

Opérateurs E_{rs} de Von Neuman :

Dans l'algèbre $\mathcal{S}_n$ on définit les opérateurs E_{rs} par :

$$E_{rs} = \sigma_{rs} P_s N_s = \sigma_{rs} E_{ss} = E_{rr} \sigma_{rs}$$

σ_{rs} est l'opérateur qui fait passer du remplissage s au remplissage r :

$$S_r^\alpha = \sigma_{rs} S_s^\alpha$$

Théorème de Von Neuman et équations de Young-Von Neuman.

Théorème :

Si $X \in \mathcal{S}_n$ est tel que $\pi_r X_{rs} v_s = X_{rs}$ alors $X_{rs} = \lambda E_{rs}$

Conséquences :

$$E_{ru} X E_{vs} = \lambda E_{rs} \text{ donc } E_r^\alpha E_r^\alpha = \theta^\alpha E_r^\alpha$$

θ^α est uniquement fonction de α ; c'est un nombre qui n'est jamais nul.

A l'aide de ce théorème on obtient les trois équations de Young-Von Neuman.

$$E_{ru}^\alpha E_{vs}^\beta = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

$$E_{ru}^\alpha E_{vs}^\alpha = 0 \quad \text{si } N_u^\alpha P_v^\alpha = 0$$

$$E_{ru}^\alpha E_{vs}^\alpha = \pm \theta_\alpha E_{rs} \quad \text{si } N_u^\alpha P_v^\alpha \neq 0$$

Remplissages standards ; ordres des représentations irréductibles :

Un remplissage est dit standard si dans chaque ligne et chaque colonne respectivement les nombres sont écrits dans un ordre croissant.

Appelons $f^{(\alpha)}$ le nombre de remplissages standards possibles pour un tableau α . On calcule que $\sum_{\alpha} [f^{(\alpha)}]^2 = h! = \text{ordre du groupe}$
 $f^{(\alpha)}$ est donc l'ordre de la représentation irréductible attachée au schéma α .

Tableaux standards "dérivés" :

Soit S_r^{α} un remplissage standard d'un schéma α :

Le tableau standard "dérivé" est obtenu en enlevant la cellule portant le nombre n

$$S_r^{*(\alpha)} = S_r^{(\alpha)} - \{n\} \quad (* \text{ indique la "dérivation"})$$

Si on "dérive" $(n-1)$ fois : $S_r^{(* \dots)}_{n-1} = \{1\}$

Le tableau $S_r^{(\alpha)}$ permet de définir l'opérateur E de $\mathcal{S}_n$ et θ

Le tableau $S_r^{*(\alpha)}$ permet de définir l'opérateur E^* de $\mathcal{S}_{n-1}$ et θ^* par $(E^* E^* = \theta^* E^*)$.

Base semi-normale dans $\mathcal{S}_n$ et représentations irréductibles du groupe :

On cherche $e_{rs}^{\alpha} \in \mathcal{S}_n$ tel que $e_{rs}^{\alpha} \cdot e_{uv}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{su} e_{rv}^{\alpha}$.

On montre par récurrence que l'on peut choisir pour les e_{rs}^{α} la définition suivante (sur les remplissages standards) :

$$e_{rs}^{\alpha} = \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_{rr}^{*(\alpha)} \cdot E_{rs}^{(\alpha)} e_{ss}^{*(\alpha)}$$

On construit ainsi une base semi-normale pour $\mathcal{S}_n$ dont on peut vérifier la dimension : on a $f^{(\alpha)}$ possibilités pour e_{rs}^{α} avec $[\alpha, s]$ fixé, de même pour $[\alpha, r]$ fixé ; on a donc en tout $\sum_{\alpha} [f^{(\alpha)}]^2 = n!$ expressions e_{rs}^{α} qui donnent bien la dimension de l'algèbre.

Dans cette formule les $e_{rr}^{*(\alpha)}$ sont des opérateurs définis par

récurrents tels que :

$$\begin{aligned} e_{rr}^{\alpha} &= \frac{1}{\theta^{\alpha}} e_{rr}^{*} E_{rr} e_{rr}^{*} \\ e_{rr}^{*(\alpha)} &= \frac{1}{\theta^{*(\alpha)}} e_{rr}^{*\alpha} E_{rr}^{*} e_{rr}^{*(\alpha)} \\ &\vdots \\ e_{rr}^{(*\dots\dots)n-1} &= I \end{aligned}$$

Appelons $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_x \dots \tau_{n!}$ les $n!$ éléments du groupe ; on peut écrire les deux bases de $\mathcal{S}_n$ vectoriellement :

$$e = \begin{vmatrix} e_{11}^{\alpha} \\ \vdots \\ e_{rs}^{\beta} \\ \vdots \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{vmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{n!} \end{vmatrix}$$

La formule de définition des e_{rs}^{α} va nous donner e en fonction de τ :

$$e = A\tau$$

Or, pour les représentations des éléments du groupe, ce qui nous intéresse c'est τ en fonction de e ; les e_{rs}^{α} constituant une base semi-normale, une simple normalisation (qui transforme e en e') nous permet de transformer A en une matrice orthogonale O dont l'inversion est immédiate :

$$e' = O\tau \quad (O = \text{matrice orthogonale})$$

$$O^{-1} = \tilde{O} \quad \text{d'où} \quad \tau = \tilde{O} e'$$

De cette dernière équation vectorielle on déduit $\tau = \tilde{O} e$ qui donne pour chaque τ_x :

$$\tau_x = \sum_{ij\alpha} c_{ij}^{\alpha} e_{ij}^{\alpha}$$

Dans le cadre d'une représentation donnée, le tableau est fixé, donc la sommation sur i et j reste seule :

$${}_{\alpha}[\tau_x] = \sum_{ij} c_{ij}^{\alpha} e_{ij}^{\alpha}.$$

Ainsi, à chaque élément τ_x du groupe S_n nous ferons correspondre la matrice d'ordre $f^{(\alpha)}$:

$$\begin{vmatrix} c_{11}^{\alpha} & c_{12}^{\alpha} & \dots & c_{1k}^{\alpha} \\ c_{21}^{\alpha} & c_{22}^{\alpha} & & \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ c_{k1}^{\alpha} & & & & c_{kk}^{\alpha} \end{vmatrix}$$

avec $k = f^{(\alpha)}$

On a bien une représentation car :

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_j &= \left(\sum_{\alpha, r, s} c_{\tau_i, rs}^{\alpha} e_{rs}^{\alpha} \right) \left(\sum_{\alpha', r', s'} c_{\tau_j, r's'}^{\alpha'} e_{r's'}^{\alpha'} \right) = \sum_{\alpha, r, s'} \sum_s c_{\tau_i, rs}^{\alpha} c_{\tau_j, ss'}^{\alpha} e_{rs'}^{\alpha} = \\ &= \sum_{\alpha, r, s'} c_{\tau_i \tau_j, rs'}^{\alpha} e_{rs'}^{\alpha} \rightarrow c_{\tau_i \tau_j, rs'}^{\alpha} = \sum_s c_{\tau_i, rs}^{\alpha} c_{\tau_j, ss'}^{\alpha} . \end{aligned}$$

On peut montrer que cette représentation est irréductible et qu'il n'y a pas deux représentations équivalentes données par les tableaux de Young.

Nous obtenons de cette manière, en étudiant successivement tous les schémas de Young possibles, toutes les représentations irréductibles du groupe.

Tableaux duaux :

Nous utiliserons dans le cas des tableaux duaux qui se distinguent par échange des lignes et des colonnes, la remarque suivante : les e_{rr} de deux tableaux duaux se déduisent l'un de l'autre par l'opération notée [Sign] :

$$[\text{Sign}] \cdot e_{\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}^{\alpha}} = e_{\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}^{\alpha} \text{ dual}}$$

[Sign] a pour effet de changer le signe des coefficients des permutations impaires dans l'expression de $e_{\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}^{\alpha}}$. Pour démontrer ceci, il suffit de remarquer que dans la définition des opérateurs P et N, les permutations impaires ne sont nanties du signe moins que dans N (qui se rapporte aux colonnes du tableau de Young), un échange des lignes et des colonnes revient donc à signer les permutations de base.

2. Les représentations irréductibles de S_4

Nous allons appliquer la théorie de Young pour trouver les représentations irréductibles du groupe $4!$; les matrices explicitées des représentations sont souvent aussi utiles en physique que la table des caractères.

Schémas possibles et remplissages standards :

. Schéma α :

--	--	--	--

 (représentation D_1)

1	2	3	4
---	---	---	---

 Remplissage standard n°1

Il n'y a qu'un remplissage standard possible d'où $f^\alpha = 1$.

. Schéma β :

 (représentation D_3)

Il y a trois remplissages standards possibles d'où $f^\beta = 3$:

1	2	3
4		

 Remplissage standard n°1

1	2	4
3		

 Remplissage standard n°2

1	3	4
2		

 Remplissage standard n°3

. Schéma γ :

 (représentation D_2)

Il y a deux remplissages standards ; $f^\gamma = 2$:

1	2
3	4

 Remplissage standard n°1

1	3
2	4

 Remplissage standard n°2

. Schéma μ :

 (représentation D'_3)

Il y a trois remplissages standards ; $f^\mu = 3$:

1	4
2	
3	

Remplissage standard n°1

1	3
2	
4	

Remplissage standard n°2

1	2
3	
4	

Remplissage standard n°3

. Schéma ν :

(représentation D'_1)Il y a un remplissage standard ; $f^\nu = 1$:

1
2
3
4

On vérifie bien que $\sum_{\alpha} [f^{(\alpha)}]^2 = 1 + 9 + 4 + 9 + 1 = 24 = \text{ordre du groupe}$.

Il y a cinq schémas différents donc autant de représentations irréductibles (et autant de classes de conjugaison) ; celles attachées à α et ν seront de dimension 1, celles attachées à β et à μ seront de dimension 3 ; quant à la représentation attachée au schéma γ elle sera de dimension 2.

Les tableaux standards seront notés respectivement :

ν_1, α_1, β_i (i de 1 à 3), γ_j (j de 1 à 2) et μ_k (k de 1 à 3).

L'étude de ces tableaux doit nous fournir les e_{rs}^{α} ; nous avons donc à calculer :

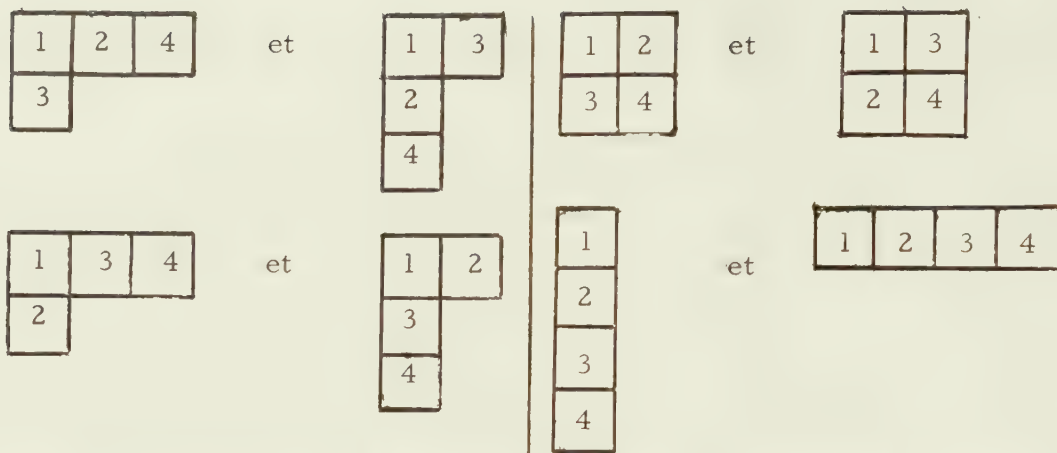
$e_{11}^{\alpha} ; e_{11}^{\nu} ; e_{11}^{\gamma} ; e_{22}^{\gamma} ; e_{12}^{\gamma} ; e_{21}^{\gamma} ; e_{11}^{\beta} ; e_{22}^{\beta} ; e_{33}^{\beta} ; e_{12}^{\beta} ; e_{21}^{\beta} ; e_{13}^{\beta} ; e_{31}^{\beta} ; e_{23}^{\beta} ;$
 $e_{32}^{\beta} ; e_{11}^{\mu} ; e_{22}^{\mu} ; e_{33}^{\mu} ; e_{12}^{\mu} ; e_{21}^{\mu} ; e_{13}^{\mu} ; e_{31}^{\mu} ; e_{23}^{\mu} ; e_{32}^{\mu}.$

Mais on peut voir qu'il y a cinq tableaux standards duaux qui sont :

1	2	3
4		

et

1	4
2	
3	



Cette remarque nous amène à n'étudier que 19 e_{rs}^α au lieu de 24 (les cinq autres se déduisant des schémas duaux) soit :

$$e_{11}^\alpha; e_{11}^\gamma; e_{12}^\gamma; e_{21}^\gamma; e_{11}^\beta; e_{21}^\beta; e_{33}^\beta; e_{12}^\beta; e_{21}^\beta; e_{13}^\beta; e_{31}^\beta; e_{23}^\beta; e_{32}^\beta; e_{12}^\mu; e_{21}^\mu; e_{13}^\mu; e_{31}^\mu; e_{23}^\mu; e_{32}^\mu.$$

NOTATION :

Pour ne pas avoir à les réécrire, les 24 éléments du groupe seront sous-entendus dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{cccccc} I & (12) & (13) & (14) & (23) & (24) \\ (34) & (123) & (132) & (124) & (142) & (134) \\ (143) & (234) & (243) & (1234) & (1243) & (1324) \\ (1342) & (1423) & (1432) & (12)(34) & (13)(24) & (14)(23) \end{array}$$

On a employé la notation : $(abc) = (ac).(ab)$ (réf. 4).

Schéma α : Recherche de e_{11}^α :

$$\begin{array}{ll} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} & S_1^{(\alpha)} \\ \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} & S_1^{*(\alpha)} \\ \boxed{1} \boxed{2} & S_1^{**(\alpha)} \\ \boxed{1} & S_1^{***(\alpha)} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 E^{***} &= I & \theta^{***} &= 1 & e^{***} &= I \\
 E^{**} &= I + (12) & \theta^{**} &= 2 & e^{**} &= \frac{1}{2} [I + (12)] \\
 E^* &= I + (12) + (13) + (23) + (123) + (132) & \theta^* &= 6 & e^* &= \frac{1}{6} [I + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)] \\
 & & & & &= \frac{1}{6} E^*
 \end{aligned}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta_\alpha = 24 \quad e_{11}^\alpha = \frac{1}{24 \times 6 \times 6} E^* E E^* = \frac{1}{24} E$$

On aura donc $e_{11}^\alpha = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Schéma γ : Recherche de e_{11}^γ , e_{12}^γ et e_{21}^γ :

On a les schémas dérivés suivants :

<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	S_1^γ	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	S_2^γ
1	2										
3	4										
1	3										
2	4										
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3		$S_1^{*\gamma}$	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	3	2		$S_2^{*\gamma}$
1	2										
3											
1	3										
2											
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2	$S_1^{**\gamma}$	<table border="1"><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	1	2	$S_2^{**\gamma}$				
1	2										
1											
2											
<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1	$S_1^{***\gamma}$	<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1	$S_2^{***\gamma}$						
1											
1											

• Cas e_{11}^γ :

$$\begin{aligned}
 E_{11}^{***} &= I & \theta^{***} &= 1 & e_{11}^{***} &= I \\
 E_{11}^{**} &= I + (12) & \theta^{**} &= 2 & e_{11}^{**} &= \frac{1}{2} [I + (12)]
 \end{aligned}$$

$$E_{11}^* = [I + (12)][I - (13)]$$

$$\theta^* = 3 \quad e_{11}^* = \frac{1}{6} [2I + 2(12) - (13) - (23) - (123) - (132)]$$

$$E_{11} = [I + (12) + (34) + (12)(34)][I - (13) - (24) + (13)(24)] \quad \theta_Y = 12 \quad e_{11}^Y = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 & -1 & 2 \\ & & & -1 & 2 & 2 \\ & & & & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

. Cas e_{12}^Y et e_{21}^Y :

Nous allons utiliser les formules $e_{12}^Y = \frac{1}{\theta_Y} e_{11}^{*Y} E_{12} e_{22}^{*Y} = \frac{1}{\theta_Y} e_{11}^{*Y} E_1 \sigma_{12} e_2^{*Y}$

$$\text{et } e_{21}^Y = \frac{1}{\theta_Y} e_{22}^{*Y} E_2 \sigma_{21} e_{11}^{*Y}.$$

$$\text{On a } \sigma_{12} = \sigma_{21} = (23)$$

σ_{12} , opérateur faisant passer du schéma 2 au schéma 1.

e_2^{*Y} se déduit de e_1^{*Y} en changeant de signe les permutations impaires d'où :

$$e_2^{*Y} = \frac{1}{6} [2I - 2(12) + (13) + (23) - (123) - 132]$$

On calcule alors que :

$$e_{12}^Y = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_{21}^Y = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schéma β : Recherche de $e_{11}^\beta, e_{22}^\beta, e_{33}^\beta, e_{12}^\beta, e_{21}^\beta, e_{13}^\beta, e_{31}^\beta, e_{23}^\beta, e_{32}^\beta$:

$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	S_1^β	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	S_2^β	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$	S_3^β
$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$	$S_1^{*\beta}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	$S_2^{*\beta}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$	$S_3^{*\beta}$
$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	$S_1^{**\beta}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$	$S_2^{**\beta}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$	$S_3^{**\beta}$
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$S_1^{***\beta}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$S_2^{***\beta}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$S_3^{***\beta}$

. Cas e_{11}^β :

$$E^{***} = I$$

$$\theta^{***} = 1 \quad e_{11}^{***} = I$$

$$E_{11}^{**} = I + (12)$$

$$\theta^{**} = 2 \quad e_{11}^{**} = \frac{1}{2} [I + (12)]$$

$$E_{11}^* = I + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)$$

$$\theta^* = 6 \quad e_{11}^* = \frac{1}{24} [I + (12)] \quad E^* [I + (12)] = \frac{1}{6} E^*$$

$$E_{11} = [H(12)H(13) + (23)H(123)H(132)][I - (14)]$$

$$\theta_\beta = 8 \quad e_{11}^\beta = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

. Cas e_{22}^β :

$$\text{On a } \theta^* = 3$$

$$e_{22}^* = \frac{1}{6} [2I + 2(12) - (13) - (23) - (123) - (132)]$$

$$E_{22}^\beta = [I + (12) + (14) + (24) + (124) + (142)][I - (13)]$$

On calcule alors que :

$$e_{22}^\beta = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 6 & 6 & -3 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & -3 & 5 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & -1 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

. Cas e_{33}^β

$$\text{On a } \theta^* = 3$$

$$e_{33}^* = \frac{1}{6} [2I - 2(12) + (13) + (23) - (123) - (132)]$$

$$E_{33}^\beta = [I + (13) + (14) + (34) + (134) + (143)][I - (12)]$$

On calcule alors que

$$e_{33}^\beta = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Cas e_{12}^β et e_{21}^β :

$$\text{Ici } \sigma_{12} = \sigma_{21} = (34)$$

$$\text{d'où } e_{12}^{\beta} = \frac{1}{8} e_1^{*\beta} (34) E_2 e_2^{*\beta} \text{ et } e_{21}^{\beta} = \frac{1}{8} e_2^{*\beta} (34) E_1 e_1^{*\beta}$$

$$e_{12}^{\beta} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_{21}^{\beta} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Cas } e_{13}^{\beta} \text{ et } e_{31}^{\beta} :$$

$$\sigma_{13} = (243) = (23)(24) \text{ et } \sigma_{31} = (234) = (24)(23)$$

$$\text{d'où } e_{13}^{\beta} = \frac{1}{\theta_{\beta}} e_1^{*\beta} \sigma_{13} E_3 e_3^{*\beta} \text{ et } e_{31}^{\beta} = \frac{1}{8} e_3^{*\beta} (234) E_1 e_1^{*\beta}$$

$$e_{13}^{\beta} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_{31}^{\beta} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Cas } e_{23}^{\beta} \text{ et } e_{32}^{\beta} :$$

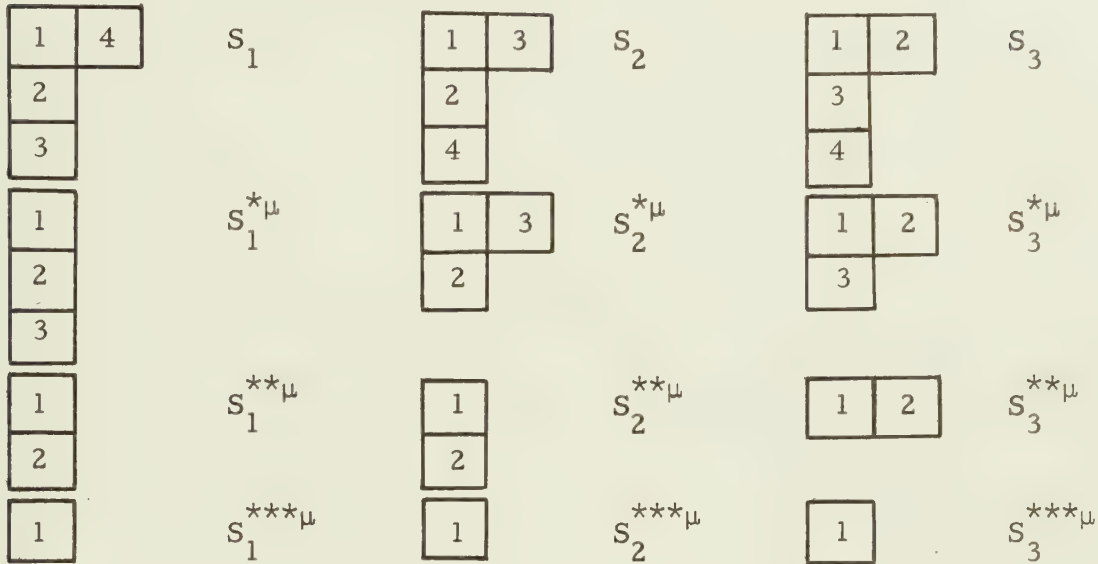
$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = (23)$$

$$\text{d'où } e_{23}^{\beta} = \frac{1}{8} e_2^{*\beta} (23) E_3 e_3^{*\beta} \text{ et } e_{32}^{\beta} = \frac{1}{8} e_3^{*\beta} (23) E_2 e_2^{*\beta}$$

$$e_{23}^{\beta} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{32}^{\beta} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Schéma μ : Recherche de $e_{12}^{\mu}, e_{21}^{\mu}, e_{13}^{\mu}, e_{31}^{\mu}, e_{23}^{\mu}, e_{32}^{\mu}$.



Pour ce schéma le θ est le même que pour le schéma β (schéma dual)

$$\text{On a donc } \theta^{\mu} = \theta^{\beta} = 8$$

Pour avoir $e_1^{*\mu}, e_2^{*\mu}, e_3^{*\mu}$ on change le signe des permutations impaires dans les expressions $e_1^{*\beta}, e_2^{*\beta}, e_3^{*\beta}$ d'où :

$$e_1^{*\mu} = \frac{1}{6} [I - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)]$$

$$e_2^{*\mu} = \frac{1}{6} [2I - 2(12) + (13) + (23) - (123) - (132)]$$

$$e_3^{*\mu} = \frac{1}{6} [2I + 2(12) - (13) - (23) - (123) - (132)]$$

De plus on a :

$$E_{11}^{\mu} = [I + (14)] [I - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)]$$

$$E_{22}^{\mu} = [I + (13)] [I - (12) - (14) - (24) + (124) + (142)]$$

$$E_{33}^{\mu} = [I + (12)] [I - (13) - (14) - (34) + (134) + (143)]$$

Ces relations permettent alors de calculer :

$$e_{12}^{\mu} = \frac{1}{8} e_1^{*\mu} \sigma_{12} E_2 e_2^{*\mu} = \frac{1}{8} e_1^{*\mu} (34) E_2 e_2^{*\mu}$$

$$e_{12}^{\mu} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_{21}^{\mu} = \frac{1}{8} e_2^{*\mu} (34) E_1 e_1^{*}$$

$$e_{21}^{\mu} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de e_{13}^{μ} et e_{31}^{μ} on a :

$$\sigma_{13} = (243)$$

$$\sigma_{31} = (234)$$

$$e_{13}^{\mu} = \frac{1}{8} e_1^{*\mu} (243) E_3 e_3^{*\mu}$$

$$e_{13}^{\mu} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_{31}^{\mu} = \frac{1}{8} e_3^{*\mu} (234) E_1 e_1^{*\mu}$$

$$e_{31}^{\mu} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de e_{23}^{μ} et e_{32}^{μ} :

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = (23)$$

$$e_{23}^{\mu} = \frac{1}{8} e_2^{*\mu} (23) E_3 e_3^{*\mu}$$

$$e_{23}^{\mu} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e_{32}^{\mu} = \frac{1}{8} e_3^{*\mu} (23) E_2 e_2^{*\mu}$$

$$e_{32}^{\mu} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Recherche de $e_{11}^{\nu}, e_{22}^{\gamma}, e_{11}^{\mu}, e_{22}^{\mu}, e_{33}^{\mu}$:

Nous allons maintenant déduire $e_{11}^{\nu}, e_{22}^{\gamma}, e_{11}^{\mu}, e_{22}^{\mu}, e_{33}^{\mu}$ des schémas duaux, c'est-à-dire en changeant le signe des permutations impaires dans $e_{11}^{\alpha}, e_{11}^{\gamma}, e_{11}^{\beta}, e_{22}^{\beta}, e_{33}^{\beta}$:

$$e_{11}^{\nu} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_{22}^{\gamma} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{11}^{\mu} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e_{22}^{\mu} = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 3 & -5 & 3 & -5 \\ -2 & -3 & -3 & 5 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$e_{33}^{\mu} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Normalisation des e_{rs}^{α} :

Nous disposons maintenant de l'expression de tous les e_{rs}^{α} dans la base des 24 permutations du groupe.

Vectoriellement on a :

$$e = A \tau \quad \text{avec} \quad e = \begin{bmatrix} e_{11}^{\alpha} \\ e_{11}^{\nu} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 \\ (12) \\ (13) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Les e_{rs}^{α} constituant une base semi-normale, une normalisation nous permet de transformer A en une matrice orthogonale dont l'inversion permettra d'exprimer τ en fonction de e.

La normalisation des e_{rs}^{α} va transformer e en e' tel que $e' = O\tau$ (O est orthogonale). $O^{-1} = \tilde{O}$ d'où $\tau = \tilde{O} e'$

$$e' \text{ est le vecteur } \begin{bmatrix} [e_{11}^{\alpha}]' \\ [e_{11}^{\nu}]' \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\text{Par exemple pour } e_{33}^{\mu} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on cherche à multiplier à droite et à gauche par x de façon que :

$$x^2 \left(\frac{1}{16}\right)^2 (2^2 + 2^2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4) = 1$$

$$\text{d'où } x = \sqrt{8}$$

$$\text{Ainsi } [e_{33}^\mu]' = \sqrt{8} e_{33}^\mu = \frac{\sqrt{8}}{16} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou bien } [e_{33}^\mu]' = \sqrt{8} e_{33}^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} \\ \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} \\ \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la même manière on trouve :

$$[e_{11}^\alpha]' = \sqrt{24} e_{11}^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \end{bmatrix} \quad [e_{11}^\nu]' = \sqrt{24} e_{11}^\nu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} \\ \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} \\ \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{-1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{24}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{11}^\gamma]' = \sqrt{12} e_{11}^\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix} \quad [e_{22}^\gamma]' = \sqrt{12} e_{22}^\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{2\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{12}^\gamma]' = 3 e_{12}^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [e_{21}^\gamma]' = 4 e_{21}^\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_{22}^\mu]' = \sqrt{8} e_{22}^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{-5}{6\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{-5}{6\sqrt{8}} \\ \frac{-1}{3\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{5}{6\sqrt{8}} & \frac{5}{6\sqrt{8}} & \frac{-1}{6\sqrt{8}} \\ \frac{-1}{6\sqrt{8}} & \frac{-1}{6\sqrt{8}} & \frac{-1}{6\sqrt{8}} & \frac{1}{6\sqrt{8}} & \frac{1}{6\sqrt{8}} & \frac{2}{3\sqrt{8}} \\ \frac{1}{6\sqrt{8}} & \frac{2}{3\sqrt{8}} & \frac{1}{6\sqrt{8}} & \frac{1}{3\sqrt{8}} & \frac{-2}{3\sqrt{8}} & \frac{-2}{3\sqrt{8}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{33}^\mu]' = \sqrt{8} e_{33}^\mu = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} \\ \frac{-1}{\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} \\ \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{1}{2\sqrt{8}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{8}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{8}} & \frac{-1}{\sqrt{8}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[e_{12}^\mu]' = 3 e_{12}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$[e_{21}^\mu]' = \frac{8}{3} e_{21}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$[e_{13}^\mu]' = \sqrt{12} e_{13}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{31}^\mu]' = \frac{8}{\sqrt{12}} e_{31}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{23}^\mu]' = \frac{8}{\sqrt{6}} e_{23}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} \\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$[e_{32}^\mu]' = \sqrt{6} e_{32}^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{4\sqrt{6}} \\ \frac{3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{4\sqrt{6}} & \frac{-3}{4\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{4\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{-1}{2\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Construction des représentations irréductibles :

La table 1 donne $\tau = \tilde{O} e'$; on en déduit $\tau = C e$ (table 2) équation vectorielle symbolisant $\tau_x = \sum_{ij\alpha} C_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha$.

On a vu que pour construire les représentations irréductibles on se place dans un schéma donné et la sommation sur i et j intervient seule.

$$[\tau_x] = \sum_{ij} C_{ij}^\alpha e_{ij}^\alpha$$

Les C_{ij}^{α} sont des éléments des matrices représentatives des τ_x dans la représentation α dont l'ordre est $f^{(\alpha)}$.

De cette manière nous trouvons les représentations suivantes :

Schéma α : 1 correspond à toutes les 24 permutations du groupe.

Schéma ν : on a 1 pour les permutations paires et -1 pour les permutations impaires.

Schéma γ : Représentation d'ordre 2 :

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1 3 2)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 2 4 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}$
(1 2)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	(1 2 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 3 2 4)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
(1 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1 4 2)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 3 4 2)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}$
(1 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1 3 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 4 2 3)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
(2 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1 4 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 4 3 2)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}$
(2 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(2 3 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 2)(3 4)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
(3 4)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	(2 4 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 3)(2 4)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
(1 2 3)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/4 \\ -1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1 2 3 4)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/4 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1 4)(2 3)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Schéma β : Représentation d'ordre 3 (D_3)

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(132)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & 2/3 \\ 1 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & -1 & -1/2 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ -1/2 & 5/6 & 1/4 \\ -1 & -1/3 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & 2/3 \\ -1/2 & -2/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & 0 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ -1/2 & 5/6 & -1/4 \\ 1 & 1/3 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & -3/4 \\ 1 & 1/3 & -1/2 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ -1/2 & 5/6 & -1/4 \\ -1 & -1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & -3/4 \\ -1 & -1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ -1/2 & -2/3 & 1/2 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ 1 & -1/6 & -1/4 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ 1 & -1/6 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & 2/3 \\ -1/2 & 5/6 & 1/4 \\ 1 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & 3/4 \\ 1 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$	(12)(34)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & 2/3 \\ 1 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$	(13)(24)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & 2/3 \\ -1/2 & -2/3 & -1/2 \\ 1 & -2/3 & 0 \end{vmatrix}$
(123)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & -1 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 8/9 & 0 \\ -1/2 & -1/6 & 3/4 \\ -1 & -1/3 & -1/2 \end{vmatrix}$	(14)(23)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -4/9 & -2/3 \\ -1/2 & -2/3 & 1/2 \\ -1 & 2/3 & 0 \end{vmatrix}$

Schéma μ : Représentation d'ordre 3 (D'_3)

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(132)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & -3/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & -1 \\ 8/9 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & -3/4 & 1/2 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & 1 \\ 4/9 & 5/6 & -1/3 \\ -2/3 & 1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & -1 \\ -4/9 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & -3/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ 4/9 & 5/6 & 1/3 \\ 2/3 & -1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1 & 0 \\ -4/9 & 1/6 & -1 \\ 2/3 & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & 1 \\ -4/9 & -5/6 & -1/3 \\ 2/3 & -1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -1 & 0 \\ 4/9 & -1/6 & 1 \\ -2/3 & 1/4 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & 1 \\ -4/9 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/2 & 0 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ -8/9 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & 1 \\ 8/9 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} 1/3 & -1/2 & -1 \\ -4/9 & -5/6 & 1/3 \\ -2/3 & 1/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -1 & 0 \\ 4/9 & -1/6 & -1 \\ 2/3 & -1/4 & 1/2 \end{vmatrix}$	(12)(34)	$\begin{vmatrix} -1/3 & -1 & 0 \\ -8/9 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ 8/9 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & 1 \\ -8/9 & -1/6 & -1/3 \\ 0 & -3/4 & 1/2 \end{vmatrix}$	(13)(24)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & 1 \\ 4/9 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/2 & 0 \end{vmatrix}$
(123)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} 1/3 & 1 & 0 \\ -4/9 & 1/6 & 1 \\ 2/3 & -1/4 & 1/2 \end{vmatrix}$	(14)(23)	$\begin{vmatrix} -1/3 & 1/2 & -1 \\ 4/9 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/2 & 0 \end{vmatrix}$

Vérification : Pour toutes les représentations on vérifie bien que les éléments d'une même classe de conjugaison soient représentés par des matrices qui ont même caractère.

I	α_{e11}	ν_{e11}	γ_{e11}	γ_{e22}	γ_{e12}	γ_{e21}	β_{e11}	β_{e22}	β_{e33}	β_{e12}	β_{e21}	β_{e13}	β_{e31}	β_{e23}	β_{e32}	μ_{e11}	μ_{e22}	μ_{e33}	μ_{e12}	μ_{e21}	μ_{e13}	μ_{e31}	μ_{e23}	μ_{e32}
(12)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(13)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(14)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(23)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(24)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(34)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(123)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(132)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(124)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(142)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(134)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(143)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(234)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(243)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1234)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1243)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1324)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1342)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1423)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(1432)	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(12)(34)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(13)(24)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(14)(23)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

TABLE 2

Classes de conjugaison	Nombre d'éléments	$\chi(D_1)$	$\chi(D'_1)$	$\chi(D_2)$	$\chi(D_3)$	$\chi(D'_3)$
Unité I	1	1	1	2	3	3
Type (ab)	6	1	-1	0	1	-1
Type (abc)	8	1	1	-1	0	0
Type (abcd)	6	1	-1	0	-1	1
Type (ab)(cd)	3	1	1	2	-1	-1

Table des caractères

du groupe S_4 .

3. Orthonormalisation des représentations données par les tableaux de Young.

La technique des tableaux de Young ne donne pas des représentations ortho-
normales ; nous en rechercherons parmi les plus simples.

a) D₂ : représentation d'ordre 2 :

On doit appliquer une transformation du type SAS^{-1}

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \quad \text{donne :}$$

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	(132)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(12)(34)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(13)(24)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$
(123)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{vmatrix}$	(14)(23)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

b) D'_3 : représentation d'ordre 3 (schéma μ) :

Changeons de base par $S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ nous obtenons alors la représentation suivante :

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(132)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 & 2\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/6 & 5/6 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/3 & 2/3 & -\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/6 & 5/6 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/6 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/6 & -5/6 & -\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/6 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 2/3 & -\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/6 & -1/6 & -2\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 & 2\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/6 & -5/6 & -\sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & -\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/6 & \sqrt{2}/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(12)(34)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & -2\sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/6 & -1/6 & -2\sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$	(13)(24)	$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -2/3 & \sqrt{2}/3 \\ \sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$
(123)	$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/2 & 1/6 & -\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{vmatrix}$	(14)(23)	$\begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{3}/3 & -2/3 & \sqrt{2}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{2}/3 & -1/3 \end{vmatrix}$

c) Représentation D_3 (schéma β) :

Il faut appliquer la transformation $S = \begin{vmatrix} 1 & 4/3 & -1 \\ -\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -4/3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$ qui donne :

I	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1 32)	$\begin{vmatrix} -1/6 & -3/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/2 & 2/\sqrt{6} \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} -1/6 & -1/2\sqrt{3} & -4/3\sqrt{2} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} -1/6 & 1/2\sqrt{3} & -4/3\sqrt{2} \\ 3/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} 5/6 & -1/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/2 & 2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} -1/6 & 3/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & -2/\sqrt{6} \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} -1/6 & 3/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & -1/2 & 2/\sqrt{6} \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} 5/6 & 1/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} & 1/2 & -2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} 5/6 & 1/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & -1/2 & 2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/2\sqrt{3} & 0 \\ -3/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} 5/6 & -1/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & -2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} -1/6 & -3/2\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{3} & -1/2 & -2/\sqrt{6} \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/2\sqrt{3} & 0 \\ 3/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} -1/2 & 3/2\sqrt{3} & 0 \\ -3/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(12)(34)	$\begin{vmatrix} 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} -1/2 & -3/2\sqrt{3} & 0 \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(13)(24)	$\begin{vmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$
(123)	$\begin{vmatrix} -1/6 & -1/2\sqrt{3} & -4/3\sqrt{2} \\ -3/2\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 2/3\sqrt{2} & 2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} -1/6 & 1/2\sqrt{3} & -4/3\sqrt{2} \\ -3/2\sqrt{3} & -1/2 & 0 \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$	(14)(23)	$\begin{vmatrix} -2/3 & -1/\sqrt{3} & 2/3\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 2/3\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & -1/3 \end{vmatrix}$

4. Self représentation S de S_4 .

$\bar{1}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(123)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1342)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
(12)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(142)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	(1423)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
(13)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(124)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	(1243)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
(14)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	(143)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	(1324)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
(23)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(134)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	(1234)	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
(24)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	(243)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(12)(34)$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
(34)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	(234)	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$(13)(24)$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
(132)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	(1432)	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$(14)(23)$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Une étude des caractères montre que $\chi(S) = \chi(D_1) + \chi(D_3)$.

Donnons un nom aux vecteurs de la base dans laquelle est exprimée la self-représentation S :

$$x = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad y = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad z = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad t = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

5. Réduction de la self-représentation S en $D_1 + D_2 = S'$.

Les matrices de la self-représentation sont unitaires ; S est donc complètement réductible par une transformation elle-même unitaire (réf. 4). Il s'agit donc de trouver R tel que $RSR^{-1} = S' = D_1 + D_3$.

Cette équation montre que 1 est valeur propre pour toutes les matrices de la self représentation, dans R^{-1} apparaîtra donc le vecteur propre colonne correspondant à cette valeur propre ; les autres vecteurs X_j composant R^{-1} sont les vecteurs de base de la représentation réduite S' ; nous avons donc à paramétriser D_3 puis à résoudre des équations vectorielles du type :

$$S X_j = \sum_{i=1}^3 \rho_{ij}(\theta, \varphi, \psi) X_i$$

On calcule ainsi que :

$$R^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

Appelons $\vec{v}$ le vecteur qui sous-tend le sous-espace lié à la représentation D_1 et p, n, A les vecteurs qui sous-tendent le sous-espace lié à la représentation D_3 ; on a :

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (x + y + z + t)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{6}} (2y - z - t)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} (-z + t)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-3x + y + z + t)$$

On aura ainsi pour la base caractéristique de S' :

$$v = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad p = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad n = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \Lambda = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

On définit de même $\bar{v}$, $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$ pour la représentation $\bar{S}'$ qui sera utilisée plus loin.

La réduction de S donne la représentation suivante :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (14) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} \quad (34) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} \quad (23) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (123) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}$$

$$(13) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} \quad (24) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (132) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (124) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (243) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & (1423) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (142) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (1234) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (1432) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (134) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (1243) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (12)(34) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (143) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (1324) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (13)(24) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (234) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & (1342) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & (14)(23) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

6. Etude et Réduction du produit de Kronecker $\overline{D}_3 \times D_3$:

$\overline{S}' \times S' = (\overline{D}_1 + \overline{D}_3) \times (D_1 + D_3) = D_1 + 2D_3 + (\overline{D}_3 \times D_3)$; on peut donc considérer la réduction de $\overline{D}_3 \times D_3$ comme une étape vers celle de $\overline{S}' \times S'$; les matrices obtenues en réduisant $\overline{D}_3 \times D_3$ sont les mêmes que celles qui interviennent dans la forme réduite de $\overline{S}' \times S'$ à condition toutefois que la représentation D_3 soit celle issue de la réduction de la self-représentation.

Le produit de deux représentations unitaires est aussi une représentation unitaire, donc $\overline{D}_3 \times D_3$ sera complètement réductible.

On ne représentera que les transpositions, sachant que $(A \times B)(A' \times B') = AA' \times BB'$ (réf. 4) les autres permutations se déduisent par multiplication.

$$\begin{vmatrix}
 1/9 & 0 & -4/9\sqrt{2} & & & & -4/9\sqrt{2} & 0 & 8/9 \\
 0 & 1/3 & 0 & & 0 & & 0 & -4/3\sqrt{2} & 0 \\
 -4/9\sqrt{2} & 0 & -1/9 & & & & 8/9 & 0 & 4/9\sqrt{2} \\
 & & & 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} & & & \\
 & 0 & & 0 & 1 & 0 & & 0 & \\
 & & & -4/3\sqrt{2} & 0 & -1/3 & & & \\
 -4/9\sqrt{2} & 0 & & 8/9 & & & -1/9 & 0 & 4/9\sqrt{2} \\
 0 & -4/3\sqrt{2} & 0 & & 0 & & 0 & -1/3 & 0 \\
 8/9 & 0 & 4/9\sqrt{2} & & & & 4/9\sqrt{2} & 0 & 1/9
 \end{vmatrix}$$

(12)

$$\begin{vmatrix}
 25/36 & -5/12\sqrt{3} & 5/9\sqrt{2} & -5/12\sqrt{3} & 1/12 & -1/3\sqrt{6} & 5/9\sqrt{2} & -1/3\sqrt{6} & 2/9 \\
 -5/12\sqrt{3} & 5/12 & 5/3\sqrt{6} & 1/12 & -1/4\sqrt{3} & -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{6} & 1/3\sqrt{2} & 2/3\sqrt{3} \\
 5/9\sqrt{2} & 5/3\sqrt{6} & -5/18 & -1/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{3} & 2/9 & 2/3\sqrt{3} & -2/9\sqrt{2} \\
 -5/12\sqrt{3} & 1/12 & -1/3\sqrt{6} & 5/12 & -1/4\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 5/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{2} & 2/3\sqrt{3} \\
 1/12 & -1/4\sqrt{3} & -1/3\sqrt{2} & -1/4\sqrt{3} & 1/4 & 1/\sqrt{6} & -1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 2/3 \\
 -1/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/6 & 2/3\sqrt{3} & 2/3 & -2/3\sqrt{6} \\
 5/9\sqrt{2} & -1/3\sqrt{6} & 2/9 & 5/3\sqrt{6} & -1/3\sqrt{2} & 2/3\sqrt{3} & -5/18 & 1/6\sqrt{3} & -2/9\sqrt{2} \\
 -1/3\sqrt{6} & 1/3\sqrt{2} & 2/3\sqrt{3} & -1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 2/3 & 1/6\sqrt{3} & -1/6 & -2/3\sqrt{6} \\
 2/9 & 2/3\sqrt{3} & -2/9\sqrt{2} & 2/3\sqrt{3} & 2/3 & -2/3\sqrt{6} & -2/9\sqrt{2} & -2/3\sqrt{6} & 1/9
 \end{vmatrix}$$

(13)

(14)

$25/36$	$5/12\sqrt{3}$	$5/9\sqrt{2}$	$5/12\sqrt{3}$	$1/12$	$1/3\sqrt{6}$	$5/9\sqrt{2}$	$1/3\sqrt{6}$	$2/9$
$5/12\sqrt{3}$	$5/12$	$-5/3\sqrt{6}$	$1/12$	$1/4\sqrt{3}$	$-1/3\sqrt{2}$	$1/3\sqrt{6}$	$1/3\sqrt{2}$	$-2/3\sqrt{3}$
$5/9\sqrt{2}$	$-5/3\sqrt{6}$	$-5/18$	$1/3\sqrt{6}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-1/6\sqrt{3}$	$2/9$	$-2/3\sqrt{3}$	$-2/9\sqrt{2}$
$5/12\sqrt{3}$	$1/12$	$1/3\sqrt{6}$	$5/12$	$1/4\sqrt{3}$	$1/3\sqrt{2}$	$-5/3\sqrt{6}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-2/3\sqrt{3}$
$1/12$	$1/4\sqrt{3}$	$-1/3\sqrt{2}$	$1/4\sqrt{3}$	$1/4$	$-1/\sqrt{6}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{6}$	$2/3$
$1/3\sqrt{6}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-1/6\sqrt{3}$	$1/3\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{6}$	$-1/6$	$-2/3\sqrt{3}$	$2/3$	$2/3\sqrt{6}$
$5/9\sqrt{2}$	$1/3\sqrt{6}$	$2/9$	$-5/3\sqrt{6}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-2/3\sqrt{3}$	$-5/18$	$-1/6\sqrt{3}$	$-2/9\sqrt{2}$
$1/3\sqrt{6}$	$1/3\sqrt{2}$	$-2/3\sqrt{3}$	$-1/3\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{6}$	$2/3$	$-1/6\sqrt{3}$	$-1/6$	$2/3\sqrt{6}$
$2/9$	$-2/3\sqrt{3}$	$-2/9\sqrt{2}$	$-2/3\sqrt{3}$	$2/3$	$2/3\sqrt{6}$	$-2/9\sqrt{2}$	$2/3\sqrt{6}$	$1/9$

(23)

$1/4$	$3/4\sqrt{3}$	0	$3/4\sqrt{3}$	$3/4$	0			
$3/4\sqrt{3}$	$-1/4$	0	$3/4$	$-3/4\sqrt{3}$	0		0	
0	0	$-1/2$	0	0	$-3/2\sqrt{3}$			
$3/4\sqrt{3}$	$3/4$	0	$-1/4$	$-3/4\sqrt{3}$	0			
$3/4$	$-3/4\sqrt{3}$	0	$-3/4\sqrt{3}$	$1/4$	0		0	
0	0	$-3/2\sqrt{3}$	0	0	$1/2$			
						$-1/2$	$-3/2\sqrt{3}$	0
	0		0			$-3/2\sqrt{3}$	$1/2$	0
						0	0	1

(24)

$1/4$	$-3/4\sqrt{3}$	0	$-3/4\sqrt{3}$	$3/4$	0			
$-3/4\sqrt{3}$	$-1/4$	0	$3/4$	$3/4\sqrt{3}$	0		0	
0	0	$-1/2$	0	0	$3/2\sqrt{3}$			
$-3/4\sqrt{3}$	$3/4$	0	$-1/4$	$3/4\sqrt{3}$	0			
$3/4$	$3/4\sqrt{3}$	0	$3/4\sqrt{3}$	$1/4$	0		0	
0	0	$3/2\sqrt{3}$	0	0	$1/2$			
						$-1/2$	$-3/2\sqrt{3}$	0
						$3/2\sqrt{3}$	$1/2$	0
						0	0	1

$$(34) \quad \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & 0 \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 1 \\ 0 & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

Réduction de $D_3 \times D_3$:

Appelons A la matrice qui réduit $D_3 \times D_3$; A^{-1} est constitué du vecteur propre colonne X_1 relatif à la valeur propre 1 (représentation D_1) et des autres vecteurs de base de la représentation réduite ; pour les trouver nous devons paramétriser D_2 , D_3 et D'_3 et résoudre des équations vectorielles du type :

$$\left. \begin{aligned} (D_3 \times D_3) X &= \cos \theta \cdot X + \sin \theta \cdot X' \\ (D_3 \times D_3) X' &= -\sin \theta \cdot X + \cos \theta \cdot X' \end{aligned} \right\} \text{ pour le sous-espace invariant de dimension 2.}$$

$$(D_3 \times D_3) Y_j = \sum_{i=1}^{i=3} \rho_{ij}(\theta, \varphi, \psi) Y_i \quad \text{pour les deux sous-espaces invariants de dimension 3.}$$

On calcule que :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d'où A par transposition :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix}$$

La représentation réduite obtenue est la suivante :

1

1

1

0

1

1

0

1

1

1

1

(I)

1

0

-1

-1

0

0

 $\frac{1}{3}$

0

 $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$

0

1

0

0

 $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$

0

 $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{9} - \frac{4}{3\sqrt{3}}$ $-\frac{4}{9}$ $\frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $-\frac{4}{9}$ $-\frac{1}{9} + \frac{4}{3\sqrt{3}}$ $\frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\frac{2}{9} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $-\frac{7}{9}$

(1 2)

(13)

1

$$\begin{array}{cc} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

0

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{array}$$

0

$\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{7}{36}$	$\frac{-1}{3\sqrt{6}} - \frac{19}{36}$	$\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}}$
$\frac{-1}{3\sqrt{6}} - \frac{19}{36}$	$\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{7}{36}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$
$\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{6}}$	$\frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$	$\frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{11}{18}$

(14)

1

$$\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

0

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{3} \end{array}$$

0

$\frac{-7}{36} + \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{19}{36}$	$\frac{-1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$
$\frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{19}{36}$	$\frac{-7}{36} - \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$
$\frac{-1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$	$\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9}$	$\frac{-11}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}}$

1

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

0

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{12}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{7}{12}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{6}$$

(23)

1

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

0

$$-\frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{7}{12}$$

$$-\frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{6}$$

(24)

1

$$0 \quad -1$$

$$-1 \quad 0$$

0

$$1 \quad 0 \quad 0$$

$$0 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

0

$$-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

(34)

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

0

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{5}{36}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7}{36}$$

$$\frac{-1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{9} + \frac{1}{6\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{7}{36} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{5}{36} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{6}} + \frac{5}{18}$$

(123)

(132)

1

$$\frac{-1}{2} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{-1}{2}$$

0

$$\frac{-1}{6} \quad \frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{-1}{3}$$

7

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{5}{36} \quad \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{7}{36} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{-2}{9} - \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7}{36} \quad \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{5}{36} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad \frac{-5}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{-1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{9} + \frac{1}{6\sqrt{6}} \quad \frac{-2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{-4}{3\sqrt{6}} + \frac{5}{18}$$

(124)

1

$$\frac{-1}{2} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{-1}{2}$$

0

$$\frac{-1}{6} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad \frac{-1}{3}$$

0

$$\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{5}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} \quad \frac{-1}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7}{36} \quad \frac{-1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{6}}$$

$$\frac{7}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{-2}{3\sqrt{6}} - \frac{5}{36} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad \frac{-2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} \quad \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \frac{5}{18} + \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

0

0

$$-\frac{5}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{5}{36} - \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{5}{18} + \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

(142)

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

0

$$\frac{1}{36} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{13}{36} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{13}{36} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18}$$

(134)

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} \quad \frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

0

$$\frac{1}{36} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{13}{36} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{13}{36} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{4}{9} + \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18}$$

(143)

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad 0$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

0

0

$$\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{2}$$

(234)

1

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}$$

0

$$-\frac{1}{2} \quad \frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad 0$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad 0$$

$$0 \quad 0 \quad 1$$

$$\frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{6}}$$

0

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{6}}$$

$$-\frac{1}{2}$$

(243)

1

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

$$\frac{11}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{27} - \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{11}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{9} - \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{7}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{7}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

(1234)

1

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0

$$\frac{-1}{6} \quad \frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad 0$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

$$\frac{11}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{11}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{9} - \frac{7}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{9} - \frac{7}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

(1243)

1

$$0 \quad -1$$

$$-1 \quad 0$$

0

$$-\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad -\frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

$$\frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{18} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{18} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{9} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{9}$$

(1324)

1

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

0

$\frac{11}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{9} - \frac{7}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{11}{36} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{9} - \frac{7}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{9} + \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}}$

(1342)

1

$$0 \quad -1$$

$$-1 \quad 0$$

0

$$-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad -\frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

$\frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{1}{18} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{9} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$
$\frac{1}{18} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{9} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$
$\frac{2}{9} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{9} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{9}$

(1423)

1

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0

$$-\frac{1}{6} \quad \frac{-3}{2\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

0

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{lll} \frac{11}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{9} + \frac{7}{6\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{11}{36} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{9} + \frac{7}{6\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{27} - \frac{5}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{9} - \frac{5}{6\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}} \end{array}$$

(14)(32)

1

$$1 \quad 0$$

$$0 \quad 1$$

0

$$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$0 \quad -1 \quad 0$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

0

$$-\frac{2}{9} + \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{9}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$-\frac{5}{9}$$

(12)(34)

1

1 0

0 1

$$-\frac{2}{3} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

0

$$-\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$-\frac{7}{18} - \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} + \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

(13) (24)

1

1 0

0 1

$$-\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \quad \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{3}$$

0

0

$$-\frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}} - \frac{2}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

$$-\frac{7}{18} + \frac{2}{3\sqrt{6}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{6}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$-\frac{2}{9} - \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

(14) (23)

7. Etude et réduction de $\tilde{S}' \times S'$:

$$S' \times S' = (D_1 + D_3) \times (D_1 + D_3) = D_1 + 2D_2 + (D_3 \times D_3)$$

La réduction de $\bar{S}' \times S'$ va donc conduire aux mêmes représentations D_1, D_2, D_3, D'_3 que celles obtenues pour la réduction de $(\bar{D}_3 \times D_3)$. Afin de définir la nouvelle base, il nous faut trouver la matrice de passage ; la méthode sera explicitée sur la permutation (12) par exemple :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 \end{array} \times \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} = \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{9\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{-4}{9\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-4}{9\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{9} & 0 & \frac{-4}{9\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{9} \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} \\ & & & & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{-4}{9\sqrt{2}} & 0 & \frac{8}{9} \\ & & & & 0 & 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & 0 & \frac{8}{9} & 0 & \frac{4}{9\sqrt{2}} \\ & & & & & & & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ & & & & & & & 0 & \frac{4}{9\sqrt{2}} & 0 \end{array}$$

Si nous réalisons les changements des lignes et des colonnes
 $6 \leftrightarrow 9$ puis $7 \leftrightarrow 13$ puis $9 \leftrightarrow 10$ nous obtenons la forme suivante :

1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$										
	0	1	0										
	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{3}$	0									
		$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$									
		0	1	0									
		$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{3}$									
					$\frac{-1}{9}$	0	$\frac{-4}{9\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{8}{9}$	0	$\frac{4}{9\sqrt{2}}$
					0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0	0	0	0
					$\frac{-4}{9\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	$\frac{-4}{9\sqrt{2}}$	0	$\frac{8}{9}$
					0	0	0	1	0	0	0	0	0
0					0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0	0	$\frac{-1}{3}$	0	0	0	0
					0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0
					$\frac{8}{9}$	0	$\frac{-4}{9\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{-1}{9}$	0	$\frac{4}{9\sqrt{2}}$
					0	0	0	0	0	$\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{3}$	0
					$\frac{4}{9\sqrt{2}}$	0	$\frac{8}{9}$	0	0	0	$\frac{4}{9\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{9}$

De la même manière que pour $(\bar{D}_3 \times D_3)$ on calcule que la matrice qui réduit cette forme est :

$$M = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & & & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ & & & & & & & & & & & & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

Pour (12) on obtiendra la forme réduite suivante :

$$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$0 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$0 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{-4}{3\sqrt{2}}$$

$$0 \quad 1 \quad 0$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{3}$$

$$0 \quad -1$$

$$-1 \quad 0$$

$$0$$

$$\frac{-4}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9} \quad -\frac{4}{9} \quad \frac{-2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9}$$

$$-\frac{4}{9} \quad \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{9} \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9}$$

$$\frac{-2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9} \quad \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{9} \quad -\frac{7}{9}$$

La transformation $M (\bar{S}' \times S) M^{-1}$ donne donc une réduction sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} D_1 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & D_3 & & & & & & & 0 & & & & & & & \\ & & D_3 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & D_3 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & D_3 & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & D_2 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & D'_3 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & D_1 & & & & & & & & \end{vmatrix}$$

Il faut remarquer qu'une telle démarche est toujours possible ; $\bar{S}' \times S'$ est une représentation unitaire donc complètement réductible ; de plus avec un choix convenable de la base on peut écrire une seule et même matrice pour les parties (contenues dans $\bar{S}' \times S'$) correspondant à la même représentation (réf. 5) ; on aura donc la représentation D_3 trois fois avec la même matrice chaque fois.

On peut écrire d'une façon compacte :

$$\bar{S}' \times S' = D_1 + E_3 \times D_3 + D_2 + D'_3 + D_1$$

E_3 étant la matrice unité à 3 dimensions.

La matrice M^{-1} est constituée par l'ensemble des vecteurs de base de la représentation réduite, à condition de les exprimer en respectant les permutations sur les vecteurs de base de $\bar{S}' \times S$ engendrées par les échanges des lignes et des colonnes envisagés plus haut.

Pour $\bar{S}' \times S'$ on a l'ordre suivant pour les vecteurs de base :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	$\bar{v}v$	$\bar{v}p$	$\bar{v}n$	$\bar{v}\Lambda$	$\bar{p}v$	$\bar{p}p$	$\bar{p}n$	$\bar{p}\Lambda$	$\bar{n}v$	$\bar{n}p$	$\bar{n}n$	$\bar{n}\Lambda$	$\bar{\Lambda}v$	$\bar{\Lambda}p$	$\bar{\Lambda}n$	$\bar{\Lambda}\Lambda$
Puis (6 $\leftrightarrow$ 9) $\Rightarrow$	$\bar{v}v$	$\bar{v}p$	$\bar{v}n$	$\bar{v}\Lambda$	$\bar{p}v$	$\bar{n}v$	$\bar{p}n$	$\bar{p}\Lambda$	$\bar{p}p$	$\bar{n}p$	$\bar{n}n$	$\bar{n}\Lambda$	$\bar{\Lambda}v$	$\bar{\Lambda}p$	$\bar{\Lambda}n$	$\bar{\Lambda}\Lambda$
(7 $\leftrightarrow$ 13) $\Rightarrow$	$\bar{v}v$	$\bar{v}p$	$\bar{v}n$	$\bar{v}\Lambda$	$\bar{p}v$	$\bar{n}v$	$\bar{\Lambda}v$	$\bar{p}\Lambda$	$\bar{p}p$	$\bar{n}p$	$\bar{n}n$	$\bar{n}\Lambda$	$\bar{p}n$	$\bar{\Lambda}p$	$\bar{\Lambda}n$	$\bar{\Lambda}\Lambda$
(9 $\leftrightarrow$ 10) $\Rightarrow$	$\bar{v}v$	$\bar{v}p$	$\bar{v}n$	$\bar{v}\Lambda$	$\bar{p}v$	$\bar{n}v$	$\bar{\Lambda}v$	$\bar{p}\Lambda$	$\bar{n}p$	$\bar{p}p$	$\bar{n}n$	$\bar{n}\Lambda$	$\bar{p}n$	$\bar{\Lambda}p$	$\bar{\Lambda}n$	$\bar{\Lambda}\Lambda$

III. QUADRO-INVARIANCE

PROPRIETES PHYSIQUES DU MODELE.

1. Le modèle de Sakata et la trio-invariance.
2. Quadro-invariance.
3. Hamiltonien mésonique quadro-invariant.
4. Echange $v \longleftrightarrow n$ dans la forme réduite. Classification des mésons.

Base	I	(xy)	(yz)	(zx)	(xzy)	(xyz)	Remarques
Champs de chaos	1	0	0	1	0	0	1
	0	1	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	1	0
Champs de Sakata	1	0	0	1	0	0	0
	0	1	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	0	1	0

Table 3.

Remarques

	(xy)	(xz)	(xt)	(yz)	(yt)	(zt)	
Champs	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	0
de	1 0 0 0	0 1 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0 1 0 0	0
chaos	0 0 1 0	1 0 0 0	0 0 1 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 1 0	0
	0 0 0 1	0 0 0 1	1 0 0 0	0 0 0 1	0 1 0 0	0 0 1 0	1

x=

y=

z=

t=

	(xy)	(xz)	(xt)	(yz)	(yt)	(zt)	
Champs	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	0
de	0 $\frac{1}{3}$ 0 $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$	0 $\frac{5}{6}$ $\frac{-1}{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$	0 $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$	0 $\frac{1}{2}$ $\frac{-3}{2\sqrt{3}}$ 0	0 $\frac{1}{2}$ $\frac{-3}{2\sqrt{3}}$ 0	0 1 0	0
Yukawa	0 0 1 0	0 $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{\sqrt{6}}$	0 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{\sqrt{6}}$	0 $\frac{-3}{2\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$ 0	0 $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ $\frac{1}{2}$ 0	0 0 0	0
	0 $\frac{-4}{3\sqrt{2}}$ 0 $\frac{1}{3}$	0 $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ $\frac{2}{\sqrt{6}}$ $\frac{1}{3}$	0 $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ $\frac{2}{\sqrt{6}}$ $\frac{1}{3}$	0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 1	1

v=

p=

n=

 $\Lambda=$

Table 4.

1. Le modèle de Sakata et la trio-invariance.

a) Réduction de la self-représentation S et de $\bar{S}' \times S'$ du groupe S_3 :

Le groupe trigonal $3!$ qui contient 6 éléments, possède trois représentations irréductibles : D_1 , $\bar{D}_1$ et D_2 d'ordres respectifs 1, 1, 2 (cf. Appendice).

Nous allons réduire la self-représentation S suivante :

$$I \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (23) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (132) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(13) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (123) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On calcule qu'il faut appliquer la transformation $\alpha S \alpha^{-1}$ avec :

$$\alpha = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

On obtient alors la représentation S' suivante :

$$I \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

[illegible]

(13)

(2 3)

[illegible]

(132)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & & & 0 \\
 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\
 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\
 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\
 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\
 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}
 \end{array}$$

(123)

En vue de réduire $\bar{S}' \times S'$, un changement de la 5e et de la 7e ligne (et des colonnes correspondantes) permet de n'avoir à réduire qu'une partie de dimension 4 ; pour (132) par exemple après ce changement on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & & & & & \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & & & \\ & & & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & & & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ & & & & & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ & & & & & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ & & & & & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$$

On calcule que la matrice qui réduit cette forme est :

$$X = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & & & & & & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & & & & & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

Si on appelle Λ, n, p la base caractéristique de S' et $\bar{\Lambda}, \bar{n}, \bar{p}$ la base caractéristique de $\bar{S}'$, alors $\bar{S}' \times S'$ est exprimée dans la base suivante :

$$\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}n, \bar{\Lambda}p, \bar{n}\Lambda, \bar{n}n, \bar{n}p, \bar{p}\Lambda, \bar{p}n, \bar{p}p.$$

Le changement de lignes et colonnes envisagé plus haut donne alors l'ordre suivant :

$$\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}n, \bar{\Lambda}p, \bar{n}\Lambda, \bar{p}\Lambda, \bar{n}p, \bar{n}n, \bar{p}n, \bar{p}p.$$

Si après le changement des lignes et des colonnes on applique la transformation $\mathbb{X}$, on aura la réduction sous la forme :

$$\left| \begin{array}{ccccccc} D_1 & & & & & & \\ & D_2 & & & 0 & & \\ & & D_2 & & & & \\ & & & D_2 & & & \\ & & & & D_1 & & \\ & 0 & & & & \bar{D}_1 & \end{array} \right|$$

Les représentations $D_1, \bar{D}_1$ et D_2 sont celles explicitées dans l'appendice.

b) Trio-invariance.

C'est l'existence des trois attributs (réf. 7) : nombre baryonique, étrangeté et charge qui conduit à l'idée de l'existence de trois champs fondamentaux X, Y, Z ; la théorie des interactions fortes est alors définie comme suit :

1ère hypothèse : toute théorie "forte" est invariante par rapport aux permutations des trois champs X, Y, Z (trio-invariance) (réf. 6).

2ème hypothèse : conservation du nombre baryonique.

3ème hypothèse : conservation de charge.

Une conséquence triviale est l'indépendance de charge (réf. 10).

Le groupe d'invariance de X, Y, Z est la représentation propre (self représentation régulière d'ordre 3) du groupe S_3 (table 3). On introduit de même les "anti-champs de chaos" : $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ attachés à $\bar{S}_3$.

La self-représentation S est réductible en $D_2 + D_1$ et décompose donc l'espace (X, Y, Z) en somme de deux espaces, l'un de dimension 2 [dont on définit la base comme (p, n)] et l'autre de dimension 1 [de base définie comme étant Λ] ; on procède de la même manière dans l'espace ($\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$) :

$n = \frac{1}{\sqrt{3}} (x+y+z)$; $p = \frac{1}{\sqrt{6}} (2x-y-z)$; $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (-y+z)$ sont les champs définis comme étant les vecteurs de base de la self représentation réduite.

On construit donc à partir des champs de chaos "un espace de particules", somme directe de deux espaces, qui distingue entre le doublet (p, n) et le singulet Λ (qui introduit l'étrangeté). Pour "construire" les mésons on prend les combinaisons baryons-antibaryons, ce qui nous amène à examiner la réductibilité de l'espace 9-dimensionnel obtenu :

$$(D_2 + D_1) \times (D_2 + D_1) = D_1 + D_1 + D_2 + D_2 + D_2 + \bar{D}_1 = 2D_1 + 3D_2 + \bar{D}_1$$

La trio-symétrie conduit ainsi à définir les mésons comme étant les vecteurs de base de la représentation $S \times S$ réduite (ce sont les vecteurs colonnes qui composent X^{-1}) ; on aura donc :

Représentations d'ordre 1 :

$$\bar{\Lambda}\Lambda, \quad \frac{\bar{p}p + \bar{n}n}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\bar{p}n - \bar{n}p}{\sqrt{2}}$$

Représentations d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Lambda}n \\ \bar{\Lambda}p \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{n}\Lambda \\ \bar{p}\Lambda \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{p}p - \bar{n}n)/\sqrt{2} \\ (\bar{p}n + \bar{n}p)/\sqrt{2} \end{array} \right\}$$

On peut alors écrire l'hamiltonien de Sakata pour les interactions fortes (qui ~~respecte~~ la conservation du nombre baryonique ce qui constitue notre 2ème hypothèse).

$$\begin{aligned} H = & a (\bar{\Lambda}\Lambda)^2 + b (\bar{\Lambda}\Lambda)(\bar{p}p + \bar{n}n) + [b' (\bar{\Lambda}\Lambda)(\bar{p}n - \bar{n}p) + h.c.] \\ & + c (\bar{p}p + \bar{n}n)^2 + c' (\bar{p}p + \bar{n}n)(\bar{p}n - \bar{n}p) + d (\bar{p}n - \bar{n}p)^2 \\ & + f [(\bar{\Lambda}p)(\bar{p}\Lambda) + (\bar{\Lambda}n)(\bar{n}\Lambda)] \\ & + [f' \{ (\bar{\Lambda}p)^2 + (\bar{\Lambda}n)^2 \} + h.c.] \\ & + g [(\bar{p}p - \bar{n}n)^2 + (\bar{p}n - \bar{n}p)^2] \\ & + [h \{ (\bar{\Lambda}n)(\bar{p}p - \bar{n}n) + (\bar{\Lambda}p)(\bar{p}n + \bar{n}p) \} + h.c.] \end{aligned}$$

La 3ème hypothèse (conservation de charge) entraîne : $\left\{ \begin{array}{l} b'=c'=f'=h=0 \\ d = -g \end{array} \right.$

d'où l'interaction suivante :

$$\begin{aligned} H = & a (\bar{\Lambda}\Lambda)^2 + b (\bar{\Lambda}\Lambda)(\bar{p}p + \bar{n}n) + c (\bar{p}p + \bar{n}n)^2 \\ & + f \{ (\bar{\Lambda}p)(\bar{p}\Lambda) + (\bar{\Lambda}n)(\bar{n}\Lambda) \} \\ & + g \{ (\bar{p}p - \bar{n}n)^2 + 2(\bar{p}n)(\bar{n}p) + 2(\bar{n}p)(\bar{p}n) \} \end{aligned}$$

Telle est l'interaction de base du type de Fermi pour le modèle de Sakata.

2. Quadro-invariance .

Yasuo Hara (réf. 8) suppose l'existence de 4 champs baryoniques fondamentaux avec une invariance par rapport au groupe continu ; de plus, la symétrie baryon-lepton et le fait que l'on ne connaisse que quatre leptons nous

a amenés à prévoir une extension possible de la trio-invariance dans le cas de 4 quarks baryoniques. De la même manière, les champs de Yukawa (Sakata généralisé) seront obtenus à partir de la réduction de la self représentation du groupe S_4 .

La réduction du produit de Kronecker de la self représentation $\bar{S}' \times S'$ donnera les "vecteurs de base de Yukawa" qui permettront d'écrire l'hamiltonien mésonique quadro-invariant.

Dans la première partie, nous avons vu que la self représentation de S_4 est réductible en $D_1 + D_3$, donc notre "espace de particules" est décomposé en la somme de deux espaces, l'un de dimension 3 [dont on définit la base comme étant (p, n, Λ)], l'autre de dimension 1 et de base définie comme étant v ; p , n , Λ et v désignent des champs qui ont les mêmes nombres quantiques que les particules indiquées par les lettres.

La généralisation directe du cas de la trio-invariance (p, n, Λ) est ici l'isomultiplet $\sum^{\pm 0}$ et le singulet Λ , mais ces quatre champs ont même étrangeté - 1 et l'étude de ce cas ne donnerait pas de mésons étranges. Nous prendrons plutôt (bien que d'autres possibilités existent (réf. 9)) les champs p , n , Λ et v avec les nombres quantiques suivants :

$$p : B = 1, \quad Y = 1, \quad I = \frac{1}{2}, \quad Q = 1$$

$$n : B = 1, \quad Y = 1, \quad I = \frac{1}{2}, \quad Q = 0$$

$$\Lambda : B = 1, \quad Y = 0, \quad I = 0, \quad Q = 0$$

$$v : B = 1, \quad Y = 2, \quad I = 0, \quad Q = 1$$

Nous avons déjà calculé la matrice $\bar{R}$ qui réduit la self représentation de S_4 .

On définit les "champs de base de Yukawa" (Table 4) comme étant les vecteurs de base de la self représentation réduite S' (ce sont les vecteurs colonnes qui constituent R^{-1}) :

$$v = \frac{1}{2} (x + y + z + t)$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{6}} (2y - z - t)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} (-z + t)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} (-3x + y + z + t)$$

Les antichamps de Yukawa $\bar{v}$, $\bar{p}$, $\bar{n}$, $\bar{\Lambda}$ sont définis de la même manière à partir de la réduction de $\bar{S}$.

3. Hamiltonien mésonique quadro-invariant :

Les mésons sont définis comme étant les vecteurs de base qui composent la matrice M^{-1} qui réduit $\bar{S}'x S'$ (symbolisant l'interaction des champs et des antichamps de Yukawa), ce sont :

Représentation d'ordre 1 :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda)$$

Représentation d'ordre 2 :

$$\frac{1}{\sqrt{12}} (-\sqrt{2} \bar{p}\Lambda + \bar{n}p + \bar{p}p - \bar{n}n + \sqrt{2} \bar{n}\Lambda + \bar{p}n - \sqrt{2} \bar{\Lambda}p + \sqrt{2} \bar{\Lambda}n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{12}} (\sqrt{2} \bar{p}\Lambda + \bar{n}p - \bar{p}p + \bar{n}n + \sqrt{2} \bar{n}\Lambda + \bar{p}n + \sqrt{2} \bar{\Lambda}p + \sqrt{2} \bar{\Lambda}n)$$

Représentation D'_3 :

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} \bar{p}\Lambda - \bar{n}\Lambda - \sqrt{2} \bar{\Lambda}p + \bar{\Lambda}n)$$

Représentations D_3 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p}\Lambda - \sqrt{2}\bar{p}p + \sqrt{2}\bar{n}n - \bar{\Lambda}p) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{2}\bar{p}n - \bar{\Lambda}n) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p}p - \bar{n}n + 2\bar{\Lambda}\Lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{v}p \\ \bar{v}n \\ \bar{v}\Lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{p}v \\ \bar{n}v \\ \bar{\Lambda}v \end{cases}$$

L'hamiltonien d'interaction baryon-antibaryon (qui conserve évidemment le nombre baryonique) est :

$$\begin{aligned} H = & a(\bar{v}v)^2 + b(\bar{v}v)(\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda) + c(\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda)^2 \\ & + d[(-\sqrt{2}\bar{p}\Lambda + \bar{n}p + \bar{p}p - \bar{n}n + \sqrt{2}\bar{n}\Lambda + \bar{p}n - \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \sqrt{2}\bar{\Lambda}n)^2 + \\ & + (\sqrt{2}\bar{p}n + \bar{n}p - \bar{p}p + \bar{n}n + \sqrt{2}\bar{n}\Lambda + \bar{p}n + \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \sqrt{2}\bar{\Lambda}n)^2] \\ & + e[(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n)^2 + (-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n)^2 + \\ & + (\sqrt{2}\bar{p}\Lambda - \bar{n}\Lambda - \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \bar{\Lambda}n)^2] \\ & + f[(-\bar{p}\Lambda - \sqrt{2}\bar{p}p + \sqrt{2}\bar{n}n - \bar{\Lambda}p)^2 + (\sqrt{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{2}\bar{p}n - \bar{\Lambda}n)^2 + (-\bar{p}p - \bar{n}n + 2\bar{\Lambda}\Lambda)^2] \\ & + [g\{(\bar{v}p)^2 + (\bar{v}n)^2 + (\bar{v}\Lambda)^2\} + h.c.] \\ & + h[(\bar{v}p)(\bar{p}v) + (\bar{v}n)(\bar{n}v) + (\bar{v}\Lambda)(\bar{\Lambda}v)] \\ & + [i\{(\bar{v}p)(-\bar{p}\Lambda - \sqrt{2}\bar{p}p + \sqrt{2}\bar{n}n - \bar{\Lambda}p) + (\bar{v}n)(\sqrt{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{2}\bar{p}n - \bar{\Lambda}n) + (\bar{v}\Lambda)(-\bar{p}p - \bar{n}n + 2\bar{\Lambda}\Lambda)\} + h.c.] \\ & + [j\{(\bar{v}p)(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + (\bar{v}n)(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + \\ & + (\bar{v}\Lambda)(\sqrt{2}\bar{p}\Lambda - \bar{n}\Lambda - \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \bar{\Lambda}n)\} + h.c.] \\ & + [k\{(\bar{p}v)(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + (\bar{n}v)(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + \\ & + (\bar{\Lambda}v)(\sqrt{2}\bar{p}\Lambda - \bar{n}\Lambda - \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \bar{\Lambda}n)\} + h.c.] \\ & + [l\{(-\bar{p}\Lambda - \sqrt{2}\bar{p}p + \sqrt{2}\bar{n}n - \bar{\Lambda}p)(-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + (\sqrt{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda + \sqrt{2}\bar{p}n - \bar{\Lambda}n) \\ & + (-\frac{\bar{p}\Lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{n}p - \bar{n}\Lambda - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{p}n + \frac{\bar{\Lambda}p}{\sqrt{2}} + \bar{\Lambda}n) + (-\bar{p}p - \bar{n}n + 2\bar{\Lambda}\Lambda)(\sqrt{2}\bar{p}\Lambda - \bar{n}\Lambda - \sqrt{2}\bar{\Lambda}p + \bar{\Lambda}n)\} + h.c.] \end{aligned}$$

Pour que l'hamiltonien respecte la conservation de la charge, il faut poser :

$$d = 0, \quad e = 0, \quad f = 0, \quad g = 0, \quad i = 0, \quad j = 0, \quad k = 0, \quad l = 0$$

d'où l'interaction finale :

$$H = a (\bar{v}v)^2 + b (\bar{v}v) (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda) + c (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda)^2 \\ + h [(\bar{v}p) (\bar{p}v) + (\bar{v}n) (\bar{n}v) + (\bar{v}\Lambda) (\bar{\Lambda}v)]$$

Les constantes a, b, c et h sont réelles pour garantir l'hermiticité de H.

Cette interaction conserve l'étrangeté S et le nombre baryonique N ; c'est l'interaction de base de notre modèle quadro-invariant.

4. Echange $v \leftrightarrow n$ dans la forme réduite. Classification des mésons.

Nous avons supposé que "p", "n", " Λ " et "v" sont les champs de base dont l'interaction avec les antichamps donne les mésons ; nos seize fonctions mésoniques comprennent seulement neuf états "purs" qui sont :

$\bar{v}v$	$\bar{v}\Lambda$
$\frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Lambda}\Lambda)$	$\bar{p}v$
$\frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p}p - \bar{n}n - 2\bar{\Lambda}\Lambda)$	$\bar{n}v$
$\bar{v}p$	$\bar{\Lambda}v$
$\bar{v}n$	

Les sept autres fonctions correspondent à des états "virtuels".

Un point important est que nous avons appliqué à "v" un traitement particulier en le rattachant à la représentation monodimensionnelle contenue dans S', et cela, parce que la particule v n'a pas été observée (si elle existe elle est très instable). Or on peut penser que la permutation $n \leftrightarrow v$ donne des nouvelles interactions possibles. Un argument en faveur de ce point de vue, est le principe d'universalité des interactions faibles (en ce qui concerne les symétries d'interaction entre des particules aussi différentes que les

électrons, les neutrinos et les mésons μ) (réf. 11, 12, 13) ; ce rapprochement est permis puisque le point de départ de notre modèle était la symétrie baryon-lepton (suggérée par Mahmoud et Konopinsky). Le traitement de Sakurai (réf. 14) illustre d'une manière théorique l'universalité des interactions fortes.

L'échange $v \leftrightarrow n$ donne les nouvelles interactions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \pi n & \bar{n} \Lambda \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{p} p + \bar{v} v + \bar{\Lambda} \Lambda) & \bar{p} n \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p} p - \bar{v} v + 2\bar{\Lambda} \Lambda) & \bar{\Lambda} n \\ \bar{n} p & \end{array}$$

Nous ne retiendrons pas les interactions $\frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{p} p + \bar{v} v + \bar{\Lambda} \Lambda)$ et $\frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p} p - \bar{v} v + 2\bar{\Lambda} \Lambda)$ qui peuvent être déduites des combinaisons linéaires des autres.

Nous disposons en tout de quatorze fonctions mésoniques correspondant à des états purs ; on peut les classer de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{Isomultiplet } \eta) & \left[\begin{array}{l} \bar{n} p \quad [\pi^+] \\ \bar{p} n \quad [\pi^-] \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{p} p + \bar{n} n + \bar{\Lambda} \Lambda) \quad [\pi^0] \end{array} \right. \\ S = 0, \quad T = 1 & \\ \\ S = \pm 2, \quad T = 0 & \left[\begin{array}{l} \bar{\Lambda} v \\ \bar{v} \Lambda \end{array} \right. \\ \\ (\eta \text{ et } \eta - 2\pi) & \left[\begin{array}{l} \bar{v} v \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (-\bar{p} p - \bar{n} n + 2\bar{\Lambda} \Lambda) \\ \bar{n} n \end{array} \right. \\ S = 0, \quad T = 0 & \\ \\ \text{(Mésons K)} & \left[\begin{array}{l} \bar{n} v \quad [K^+] \\ \bar{v} n \quad [K^-] \\ \bar{n} \Lambda \\ \bar{\Lambda} n \\ \bar{v} p \\ \bar{p} v \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K^0 = \frac{\alpha (\bar{p} v) + \beta (\bar{\Lambda} n)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ \bar{K}^0 = \frac{\alpha (\bar{v} p) + \beta (\bar{n} \Lambda)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{array} \right. \\ S = \pm 1, \quad T = \frac{1}{2} & \end{array}$$

Nous avons proposé un modèle des interactions fortes dont les principes sont : la quadro-invariance, la conservation du nombre baryonique, la conservation de la charge ; des interactions plus faibles peuvent violer l'un de ces principes.

Nos particules "vraiment élémentaires" sont des fermions tandis que les bosons sont des systèmes composés ; cela est intéressant puisque les fermions appartiennent aux représentations spinorielles élémentaires du groupe de Lorentz, groupe d'invariance lié aux équations des particules relativistes (cf. Wigner).

Nous pouvons alors annoncer un développement possible de cette théorie à partir de la recherche de la liaison qui existe entre notre groupe S_4 (lié aux nombres quantiques internes) et le formalisme externe (groupe de Lorentz propre inhomogène dont l'algèbre de Lie admet des représentations caractérisées par la masse et le spin des particules).

IV. APPENDICE

RECHERCHE DES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES DE S_3 .

Les schémas avec remplissages standards sont les suivants :

. Schéma α_1 :



(Représentation D_1)

Il y a un remplissage standard possible d'où $f^{(\alpha_1)} = 1$:



Remplissage standard n° 1

. Schéma α_1 :



(Représentation $\overline{D}_1$)

Il y a un remplissage standard possible d'où $f^{(\alpha_1)} = 1$:



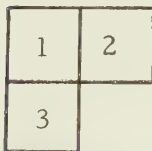
Remplissage standard n° 1

. Schéma α_2 :

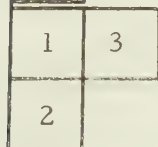


(Représentation D_2)

Il y a deux remplissages standards ; $f^{(\alpha_2)} = 2$:



Remplissage standard n° 1



Remplissage standard n° 2

On vérifie bien que $\sum_{\alpha} [f^{(\alpha)}]^2 = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6 = \text{ordre du groupe}$.

Nous avons deux représentations irréductibles d'ordre 1 et une d'ordre 2.

Par ailleurs on a les tableaux duaux suivants : S_1^1 et S_1^1 , S_1^2 et S_2^2 ; ainsi nous n'aurons à calculer que e_{11}^1 , e_{11}^2 , e_{12}^2 , e_{21}^2 ; quant à e_{11}^1 et e_{22}^2 on les déduira des expressions e_{11}^1 et e_{11}^2 en changeant le signe des coefficients des permutations impaires.

De la même manière que lors de l'étude de S_4 on calcule que :

$$e_{11}^1 = \frac{1}{6} [1 + (12) + (13) + (23) + (132) + (123)]$$

$$e_{11}^{\bar{1}} = \frac{1}{6} [1 - (12) - (13) - (23) + (132) + (123)]$$

$$e_{11}^2 = \frac{1}{6} [2I + 2(12) - (13) - (23) - (132) - (123)]$$

$$e_{22}^2 = \frac{1}{6} [2I - 2(12) + (13) + (23) - (132) - (123)]$$

$$e_{12}^2 = \frac{1}{3} [0 + 0 - (13) + (23) - (132) + (123)]$$

$$e_{21}^2 = \frac{1}{4} [0 + 0 - (13) + (23) + (132) - (123)]$$

Si on normalise ces résultats on obtient :

$$[e_{11}^1]' = \sqrt{6} \quad e_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} [1 + (12) + (13) + (23) + (132) + (123)]$$

$$[e_{11}^{\bar{1}}]' = \sqrt{6} \quad e_{11}^{\bar{1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} [1 - (12) - (13) - (23) + (132) + (123)]$$

$$[e_{11}^2]' = \sqrt{3} \quad e_{11}^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} [2I + 2(12) - (13) - (23) - (132) - (123)]$$

$$[e_{22}^2]' = \sqrt{3} \quad e_{22}^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} [2I - 2(12) + (13) + (23) - (132) - (123)]$$

$$[e_{12}^2]' = \frac{3}{2} \quad e_{12}^2 = \frac{1}{2} [0 + 0 - (13) + (23) - (132) + (123)]$$

$$[e_{21}^2]' = 2 \quad e_{21}^2 = \frac{1}{2} [0 + 0 - (13) + (23) + (132) - (123)]$$

Si on appelle τ_i les éléments du groupe S_3 , on peut écrire vectoriellement :

$$e' = O\tau \quad (O \text{ est une matrice orthogonale})$$

$$\text{d'où } \tau = O^{-1}e' = \tilde{O}e':$$

I	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 0 \quad 0$	$\sqrt{6} e_{11}^1$
(12)	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad 0 \quad 0$	$\sqrt{6} e_{11}^T$
(13)	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} e_{11}^2$
(23)	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	$\sqrt{3} e_{22}^2$
(132)	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{\sqrt{3}}{6} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2} e_{12}^2$
(123)	$\frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}$	$2 e_{21}^2$

D'où, en fonction des e_{rs}^α :

I	$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0$	e_{11}^1
(12)	$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0$	e_{11}^T
(13)	$1 \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad -1$	e_{11}^2
(23)	$1 \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad 1$	e_{22}^2
(132)	$1 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad 1$	e_{12}^2
(123)	$1 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad -1$	e_{21}^2

Nous disposons maintenant des expressions du type

$\tau_i = \sum_{rs\alpha} u_{rs\tau_i}^\alpha e_{rs}^\alpha$; pour avoir les représentations afférentes à chaque schéma nous ferons correspondre à τ_i la matrice dont les éléments sont les $u_{rs\tau_i}^\alpha$ (où α est fixé et r, s varient de toutes les façons possibles).

Représentation D_1 : C'est la représentation triviale qui à tout $\tau_i \in S_3$ fait correspondre l'unité.

Représentation $\overline{D}_1$: On a 1 pour les permutations paires et - 1 pour les permutations impaires.

Représentation D_2 : C'est une représentation d'ordre 2 (car il y a deux remplissages standards possibles pour le schéma α_2) :

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 (12) & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 (13) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (23) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (132) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (123) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Pour avoir une représentation orthogonale équivalente à D_2 il faut appliquer un changement de base par :

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{array}{ll}
 \text{I} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 (12) & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 (13) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (23) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (132) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
 (123) & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Pour chaque représentation, on vérifie bien que l'on a les mêmes caractères dans une classe de conjugaison ; on peut dresser la table des caractères suivante :

Classes	Nombre d'éléments	$\chi (D_1)$	$\chi (\overline{D}_1)$	$\chi (D_2)$
I	1	1	1	2
Type (ab)	3	1	-1	0
Type (abc)	2	1	1	-1

Table des Caractères
du groupe S_3 .

REFERENCES

1. Prog. Elem. Part. and Cosmic Rays phys. Volume 4, page 49
(North-Holl. Publ. Co, Amsterdam 1958)
2. M. FLATO. Cours de théorie des groupes (1964-1965)
Fac. des Sciences de Lyon.
3. D.E. RUTHERFORD. Substitutional analysis
(Edimbourg University Press).
4. M. HAMERMESH. Group Theory (Addison-Wesley publishing company,
London-Paris 1962).
5. Th. KAHAN. Théorie des groupes en physique classique et quantique
Tome 1, (Dunod, Paris, 1960).
6. Y. YAMAGUCHI. Physics Letters
9, (1964), 281.
7. ROMAN. Theory of elementary particles
(North-Holl. Publ. Co, Amsterdam 1961).
8. YASUO HARA. Physical Review
(1964), 133, B 1565.
9. M. FLATO, G. RIDEAU et J.P. VIGIER, Nuclear Physics
61, (1965), 254.
10. K.M. CASE, R. KARPLUS and C.N. YANG
Phys. Rev. 101 (1956), 874.
11. S. OGAWA. Prog. Theor. Phys.
21, (1959), 209.
12. J.M. GAILLARD. Thèse
Paris, mai 1963.
13. M. IKEDA, Y MIYACHI et S. OGAWA. Progr. Theor. Phys.
24, (1960), 582.
14. M. FLATO. Cours sur les interactions fortes (1964-1965)
Fac. des Sciences de Lyon.

Vu :

Les Membres du Jury,

MM. BRACONNIER

FLATO

VIGIER

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 11 juin 1965

Le Recteur,

Président du Conseil de l'Université,

P. LOUIS

